

Conduction dans un "mur" multicouche avec sources : extension de la notion de quadripôle

A. DEGIOVANNI

LEMTA Ecole des Mines, Parc de Saurupt, 5400 Nancy, France

(Reçu le 15 Mars 1987 et sous forme finale le 26 Juin 1987)

Résumé—La notion de "quadripôle thermique" est utilisée pour résoudre les transferts de chaleur unidirectionnels transitoires dans les systèmes constitués de plusieurs milieux présentant à la fois des sources internes, des contacts imparfaits, des sources aux interfaces et des déséquilibres de température initiaux. Les calculs sont menés en géométrie plane, ils s'étendent sans difficulté aux géométries cylindrique et sphérique.

ON ÉTEND la notion de "quadripôle thermique" à des systèmes présentant des sources internes (le système n'étant pas forcément à l'équilibre thermique à l'instant initial).

1. MUR PASSIF

Considérons un "mur" d'épaisseur e en régime transitoire, sans source interne et à l'équilibre thermique à l'instant initial :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \\ T = 0 \quad \text{à} \quad t = 0 \end{cases}$$

appelons θ_e, θ_s les transformées de Laplace des températures en $z = 0$ et $z = e$, et Φ_e, Φ_s les transformées de Laplace des flux en $z = 0$ et $z = e$.

Il existe une relation linéaire entre les grandeurs d'entrée (θ_e et Φ_e) et les grandeurs de sortie (θ_s et Φ_s) [1] :

$$\begin{cases} \theta_s = A\theta_e + B\Phi_e \\ \Phi_s = C\theta_e + D\Phi_e \end{cases}$$

ou la matrice

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

est la matrice de transfert inverse du quadripôle associé au mur : $A = \text{ch} \sqrt{(s/a)e}$, $B = (e/\lambda S) \text{sh} \sqrt{(s/a)e}$, $C = \text{sh} \sqrt{(s/a)e}$, $D = \text{ch} \sqrt{(s/a)e}$ (système symétrique), $AD - BC = 1$ (système passif).

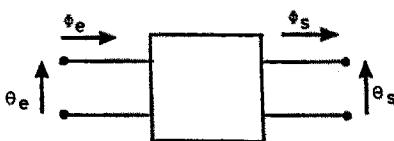


FIG. 1. Quadripôle associé à un "mur".

2. "MUR" EN PRÉSENCE DE SOURCES

Considérons un mur d'épaisseur e , en régime transitoire, présentant N sources internes caractérisées par une puissance volumique fonction du temps et de l'espace (le mur n'est pas forcément à l'équilibre thermique à l'instant initial) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{\lambda} f(z, t) = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \\ T = h(z) \quad \text{à} \quad t = 0. \end{cases}$$

Appliquons la transformée de Laplace :

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} + \frac{1}{\lambda} F(z, s) + \frac{h(z)}{a} = \frac{s}{a} \theta \quad (1)$$

avec

$$F = \mathcal{L}[f(z, t)]$$

la solution de cette équation est de la forme :

$$\theta(s, z) = K_1 \text{ch}(kz) + K_2 \text{sh}(kz) + y$$

avec

$$k^2 = s/a$$

et $y(z, s)$ une solution particulière de (1) qui peut-être obtenue par un développement :

$$y(s, z) = \frac{1}{\rho c s} \left[F(s, z) + \frac{a \partial^2 F}{s \partial z^2} + \frac{a^2 \partial^4 F}{s^2 \partial z^4} + \dots \right] + \frac{1}{s} \left[h(z) + \frac{a}{s} h'' + \frac{a^2}{s^2} h^{(4)} \dots \right]$$

K_1 et K_2 sont calculés à partir de θ_e and Φ_e ; on en déduit alors les grandeurs de sortie θ_s et Φ_s :

$$\begin{aligned} \theta_s &= [\theta_e - y(0)] \text{ch}(ke) \\ &\quad - [(\lambda S y'(0) + \Phi_e) / \lambda S k] \text{sh}(ke) + y(e) \\ \Phi_s &= \lambda S k [\theta_e - y(0)] \text{sh}(ke) \\ &\quad + [\lambda S y'(0) + \Phi_e] \text{ch}(ke) - \lambda S y'(e) \end{aligned}$$

NOTATIONS

| | | | |
|-------------|---|----------------|---|
| a | diffusivité thermique | S | aire de la section du "mur" |
| e | épaisseur du "mur" | s | variable de Laplace |
| h | coefficient d'échange latéral du "mur" | y' | dérivée première de y par rapport à z . |
| $L[f]$ | transformée de Laplace de f | | |
| m | périmètre de la section du "mur" | | |
| $R_{n,n+1}$ | résistance de contact entre le mur n et le mur $n+1$ | Symboles grecs | |
| | | λ | conductivité thermique. |

d'où l'expression des grandeurs d'entrée en fonction des grandeurs de sortie :

$$\begin{bmatrix} \theta_e \\ \Phi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_s \\ \Phi_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (2)$$

avec A, B, C, D , les mêmes expressions que dans le cas passif (indépendantes des sources) et :

$$\begin{cases} X = y(0) - y(e) \operatorname{ch}(ke) + \frac{\operatorname{sh}(ke)}{k} y'(e) \\ Y = -\lambda S [y'(0) + ky(e) \operatorname{sh}(ke) - \operatorname{ch}(ke) y'(e)]. \end{cases}$$

3. MULTICOUCHES EN CONTACT PARFAIT

Appliquons le résultat précédent à chaque "mur" n constituant le multicouche; en notation simplifiée appelons $[E_n]$ le vecteur d'entrée, $[M_n]$ la matrice de transfert, $[S_n]$ le vecteur de sortie et $[P_n]$ le vecteur source, soit :

$$[E_n] = [M_n][S_n] + [P_n] \quad (3)$$

si les murs sont en contact parfait, on a pour tous les interfaces l'égalité des températures et des flux soit :

$$[S_n] = [E_{n+1}]$$

d'où le résultat pour N murs :

$$[E_1] = [\mathcal{M}][S_N] + [\mathcal{P}] \quad (4)$$

avec

$$[\mathcal{M}] = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} A_N & B_N \\ C_N & D_N \end{bmatrix} \quad (5)$$

et

$$[\mathcal{P}] = \begin{bmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} A_{N-1} & B_{N-1} \\ C_{N-1} & D_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_N \\ Y_N \end{bmatrix} \quad (6)$$

4. MULTICOUCHES AVEC RÉSISTANCES DE CONTACTS

La représentation des contacts thermiques en régimes transitoires fait appel à des modèles plus ou moins complexes qu'il est toujours possible d'interpréter en terme de quadripole [2]; à titre d'exemple le modèle résistif pur s'écrit :

$$[C_{n,n+1}] = \begin{bmatrix} 1 & R_{n,n+1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en toute généralité on a :

$$[S_n] = [C_{n,n+1}][E_{n+1}] \quad (7)$$

La relation entre les grandeurs d'entrée de deux murs successifs s'écrit :

$$[E_n] = [M_n][C_{n,n+1}][E_{n+1}] + [P_n] \quad (8)$$

Le résultat est donc le même que dans le cas précédent (formule (3)) en remplaçant :

$$[M_n] \text{ par } [M_n][C_{n,n+1}].$$

5. MULTICOUCHES AVEC RÉSISTANCE DE CONTACT ET SOURCES DE CHALEUR AUX INTERFACES

Relation (7) est remplacée par (Fig. 2) :

$$[S_n] = [Q_{sn}] + [C_{n,n+1}]\{[E_{n+1}] + [Q_{e,n+1}]\} \quad (9)$$

ou

$$[Q_{sn}] = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_{sn} \end{bmatrix}$$

et

$$[Q_{en}] = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_{en} \end{bmatrix}$$

avec

$$Q = \mathcal{L}[q(t)]$$

ou q_s est la source localisée en sortie du mur et q_e est la source localisée en entrée du mur.

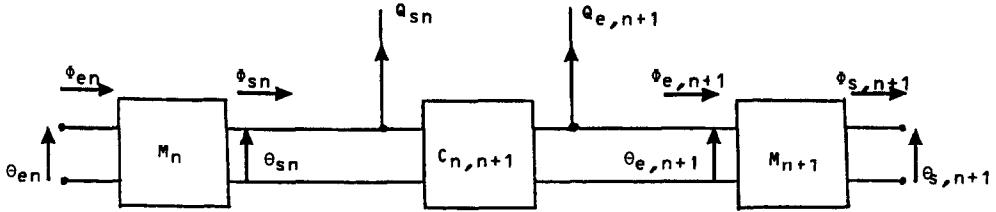


FIG. 2. Quadripôles associés à un "mur" multicouche avec résistances de contact et sources de chaleur aux interfaces.

La relation (8) devient :

$$[E_n] = [M_n][C_{n,n+1}][E_{n+1}] + [M_n][Q_{n,n+1}] + [P_n] \quad (10)$$

avec

$$[Q_{n,n+1}] = [Q_{sn}] + [C_{n,n+1}][Q_{e,n+1}].$$

Le résultat précédent (formule (4)) est encore valable en remplaçant :

$$\begin{aligned} [M_n] &\text{ par } [M_n][C_{n,n+1}] \\ [P_n] &\text{ par } [M_n][Q_{n,n+1}] + [P_n]. \end{aligned}$$

6. CONDITIONS AUX LIMITES

Dans cette représentation, les conditions aux limites du système ne posent aucun problème. Pour des conditions de type Dirichlet ou Neumann, on a simplement deux grandeurs imposées parmi les quatre grandeurs aux limites \$\theta_{e1}\$, \$\theta_{sN}\$, \$\Phi_{e1}\$ ou \$\Phi_{sN}\$ (variables avec \$s\$ en toute généralité); pour des conditions de type Fourier, on introduit deux matrices de transfert traduisant les coefficients d'échange \$h_e\$ et \$h_s\$ (entrée et sortie du système), ainsi que \$\theta_{e0}\$, \$\theta_{s0}\$ les températures extérieures au système (connues et variables avec \$s\$ en toute généralité) : soit

$$[H_e] = \begin{bmatrix} 1 & 1/h_e S \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ de même pour } [H_s].$$

La Fig. 3 représente la condition la plus générale : coefficient d'échange et flux surfaciques imposés (\$Q_{e0}\$ et \$Q_{s0}\$) d'ou la relation entre les grandeurs extérieures et les grandeurs d'entrée du système :

$$[E_0] = [H_e]\{[E_1] + [Q_{e0}]\} \quad (11)$$

de même pour la sortie :

$$[S_N] = [Q_{s0}] + [H_s][S_0]. \quad (12)$$

7. EXTENSION AU "AILETTES"

Une dernière extension permet de traiter des problèmes qui ne sont pas strictement unidirectionnel en utilisant l'approximation de l'ailette (\$T_e\$, température extérieure fonction de \$z\$)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{hm}{\lambda S}(T - T_e) = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \\ T = h(z) \text{ à } t = 0. \end{cases}$$

Appliquons la transformée de Laplace

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - \frac{hm}{\lambda S} \theta + \frac{hm T_e}{\lambda S} \frac{1}{s} = \frac{s}{a} \theta. \quad (13)$$

Que l'on peut écrire

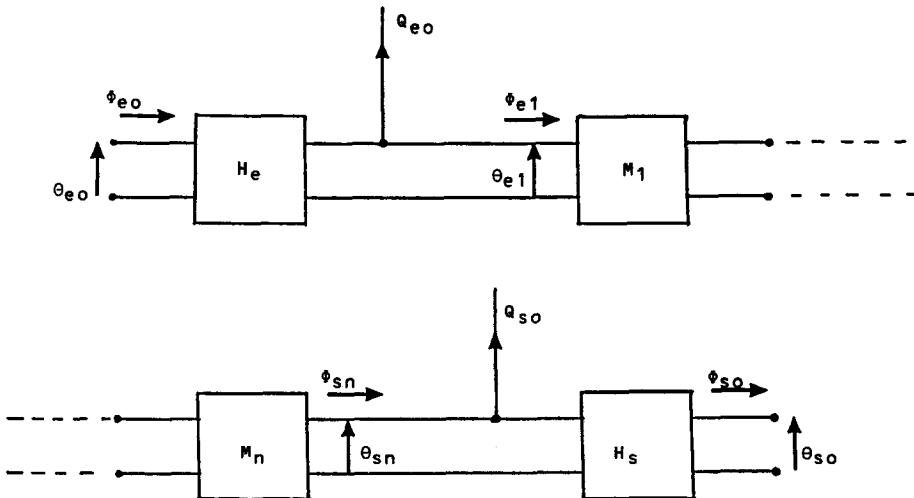


FIG. 3. Quadripôles associés aux conditions aux limites.

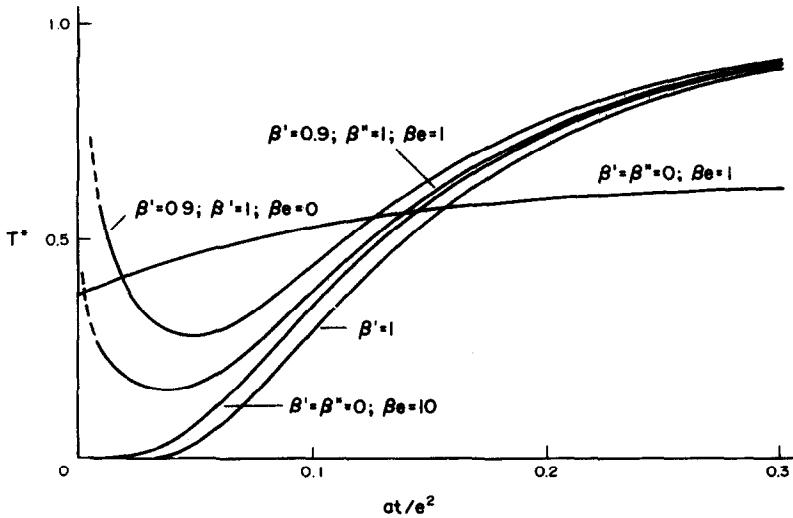


FIG. 4. Evolution de la température sur la face $z = e$ d'un milieu semi-transparent soumis à une impulsion de flux sur la face $z = 0$.

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \left(\frac{hm}{\lambda S} + \frac{s}{a}\right)\theta + \frac{1}{\lambda}F(z, s) = 0.$$

On retrouve une expression identique à (1) en posant :

$$k^2 = \frac{hm}{\lambda S} + \frac{s}{a}.$$

8. APPLICATIONS

Le principal intérêt de cette méthode est sa simplicité d'application comparer par exemple à un calcul par séparation des variables où en particulier la recherche des valeurs propres devient très vite complexe lorsque le nombre de parois augmente; ici nous n'avons effectué que des produits de matrice 2×2 . La seule difficulté se situe dans le calcul de l'original; nous l'avons surmonté par un retour numérique [3] qui nous a donné entière satisfaction.

Les applications sont très nombreuses et dans des domaines très variés; nous citerons en particulier les transferts dans les parois de bâtiments, dans les planchers chauffants, dans les composites, dans les milieux semi-transparentes, en métrologie thermique, etc.

A titre d'exemple, nous appliquons cette technique à la mesure de la diffusivité thermique de milieu semi-transparent par méthode "flash".

Il s'agit de calculer la température sur la face $z = e$ d'un échantillon cylindrique semi-transparent ("froid") soumis à une impulsion de flux sur la face $z = 0$. En général la face avant est recouverte par une fine couche de peinture noire et la face arrière par un dépôt métallique. Si on appelle E l'énergie reçu par unité de surface et si l'on néglige les échanges avec le milieu extérieur pour simplifier les écritures on obtient :

$$\begin{cases} \phi_e(t) = E\beta' \delta_0(t) \\ f(z, t) = \beta E \exp(-\beta z)(1 - \beta') \delta_0(t) \\ \phi_s(t) = -\beta'' E \exp(-\beta e)(1 - \beta') \delta_0(t) \end{cases}$$

où β est le coefficient d'absorption du milieu, β' et β'' les coefficients d'absorption de la face avant et arrière, et $\delta_0(t)$ un Dirac au temps $t = 0$.

En supposant le système à l'équilibre au temps $t = 0$, on a :

$$y(z, s) = \frac{E\beta(1 - \beta') \exp(-\beta z)}{\lambda(k^2 - \beta^2)}$$

soit

$$Y = \frac{S\beta^2 E(1 - \beta')}{k^2 - \beta^2} \left[1 - \frac{k}{\beta} \exp(-\beta e) \operatorname{sh}(ke) - \exp(-\beta e) \operatorname{ch}(ke) \right]$$

l'équation (2) nous donne :

$$\theta_s = \frac{\Phi_e - Y - D\Phi_s}{C} \quad \text{et par suite} \quad T_s = \mathcal{L}^{-1}[\theta_s].$$

Le Fig. 4 présente quelques réponses obtenues en fonction de β , β' et β'' .

Cette technique, très générale, n'est pas limitée à la géométrie plane, mais s'étend très facilement (si ce n'est la longueur des expressions obtenues) aux cylindres et aux sphères.

REFERENCES

1. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd Edn, p. 326. Clarendon Press, Oxford (1959).
2. Y. Doin, Contribution à l'étude des contacts thermiques solide-solide en régimes variables, Thèse INPL Nancy (1986).
3. H. Stehfest, Algorithm 368. Numerical inversion of Laplace transforms, *Commun. A.C.M.* 13, 47-49 (1970).

**THERMAL CONDUCTION IN A MULTILAYER SLAB WITH INTERNAL SOURCES;
USING A QUADRIPOLE METHOD**

Abstract—The 'thermal quadripole' method is used for the resolution of monodirectional transient heat transfer. In this case, it is applied to systems made of various materials, including internal sources, contact resistances, boundary sources and initial non-equilibrium temperatures. The resolution is made first for a plane geometry but can be easily extended to cylindrical and spherical configurations.

**ANWENDUNG EINER QUADRIPOL-METHODE AUF DIE WÄRMELEITUNG MIT
INTERNER QUELLE IN GESCHICHTETEN PLATTEN**

Zusammenfassung—Die 'thermische Quadripol'-Methode wird zur Lösung der eindimensionalen instationären Wärmeleitung verwendet. Hier wird sie auf Systeme verschiedener Materialien mit inneren Quellen, Kontaktwiderständen, Quellen am Rand angewendet, wobei zu Beginn ein Temperatur-Ungleichgewicht besteht. Die Lösung ist zunächst für ebene Geometrien angegeben, kann aber leicht auf zylindrische und sphärische Anordnungen erweitert werden.

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ
ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛИТЫ С
ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ**

Аннотация—Метод "теплового четырехполюсника" используется для решения задачи одномерного нестационарного переноса тепла. В данном случае он применен к системам, состоящим из различных материалов и имеющим внутренние источники, контактные сопротивления, граничные источники и начальную неравномерность температуры. Решение получено для плоской геометрии, но его можно легко распространить на цилиндрическую и геометрическую конфигурации.